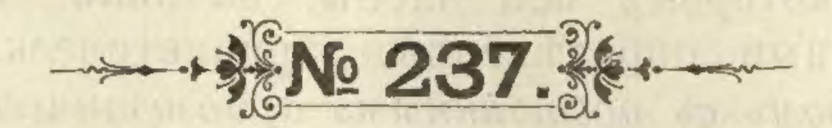
XX Сем. 10-го Апрѣля 1896 г. № 9.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



РЯДЫ СЪ ПОСТОЯННЫМЪ ИЗБЫТКОМЪ.

Отвѣтъ на тему, предложенную профессоромъ Ермаковымъ въ № 188 „Вѣстника Опытной Физики“.

I. Опредѣленія.

1. Въ какомъ-нибудь численномъ ряду

$$u_1,\ u_2, \ldots .\ u_{n-1},\ u_n\ ,\ u_{n+1}\ , \ldots .$$

отношеніе n-го члена къ суммѣ смежныхъ членовъ

$$\frac{u_n}{u_{n-1}+u_{n+1}} \qquad (1)$$

назовемъ *ариѳметическимъ избыткомъ* n-*го члена.*

Квадратъ n-го члена безъ произведенія смежныхъ членовъ

$$u_n^2 - u_{n-1}\cdot u_{n+1} \qquad (2)$$

назовемъ *геометрическимъ избыткомъ* n-*го члена.*

2. Изъ формы выраженія (2) слѣдуетъ, что каждый членъ любого численнаго ряда имѣетъ конечный опредѣленный геометрическій избытокъ.

Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ того, чтобы членъ u_n имѣлъ конечный опредѣленный ариѳметическій избытокъ, является неравенство

$$u_{n-1}+u_{n+1}\lesseqgtr 0.$$

Наоборотъ, необходимымъ и достаточнымъ условіемъ того, чтобы членъ u_n не имѣлъ ариѳметическаго избытка (чтобы онъ имѣлъ безконечный избытокъ, какъ выражаются иначе) или же имѣлъ неопредѣленный ариѳметическій избытокъ, является уравненіе

$$u_{n-1}\mp u_{n+1}=0. \qquad (3).$$

Эти выводы вытекаютъ изъ самого вида выраженія (1).

3. Рядъ, въ которомъ всѣ члены, начиная со второго, имѣютъ одинаковый конечный опредѣленный ариѳметическій избытокъ, назовемъ *чистымъ рядомъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ*.

Къ чистымъ рядамъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ условимся отнести рядъ, въ которомъ всѣ члены имѣютъ безконечный ариѳметическій избытокъ.

Къ чистымъ рядамъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ отнесемъ также и рядъ, всѣ члены котораго имѣютъ неопредѣленный ариѳметическій избытокъ.

Рядъ, въ которомъ нѣкоторые члены имѣютъ постоянный конечный опредѣленный ариѳметическій избытокъ, а остальные члены — неопредѣленный, назовемъ *смѣшаннымъ рядомъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ*.

Къ смѣшаннымъ рядамъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ условимся также отнести ряды, въ которыхъ ариѳметическій избытокъ для нѣкоторыхъ членовъ безконеченъ, а для другихъ — есть величина неопредѣленная.

Совокупность всѣхъ чистыхъ и смѣшанныхъ рядовъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ назовемъ прямо *рядами съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ*.

4. Если мы найдемъ всѣ ряды, каждые три члена которыхъ u_{n-1}, u_n, u_{n+1} удовлетворяютъ уравненію

$$u_n=k(u_{n-1}+u_{n+1}) \qquad (4)$$

гдѣ k есть конечная опредѣленная постоянная, то въ числѣ найденныхъ рядовъ будутъ всѣ существующіе чистые и смѣшанные ряды съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ k, а также рядъ съ неопредѣленнымъ избыткомъ.

Дѣйствительно, уравненіе (4) даетъ

$$\frac{u_n}{u_{n-1}+u_{n+1}}=k,$$

если $u_{n-1}+u_{n+1}$ не нуль.

Если же $u_{n-1}+u_{n+1}=0$, то, по уравненію (4), и $u_n=0$, а потому избытокъ n-го члена неопредѣленный.

Точно такъ же, согласно съ замѣчаніемъ, сопровождающимъ уравненіе (3), если мы найдемъ всѣ ряды, въ которыхъ каждые два члена съ указателями, разнящимися на 2, u_{n-1} и u_{n+1}, связаны уравненіемъ

$$u_{n-1}+u_{n+1}=0,$$

то въ числѣ найденныхъ рядовъ будутъ всѣ чистые и смѣшанные ряды съ безконечнымъ избыткомъ, а также рядъ съ неопредѣленнымъ избыткомъ.

Мы говоримъ *рядъ,* а не *ряды* съ неопредѣленнымъ избыткомъ, ибо позже покажемъ, что есть лишь одинъ такой рядъ.

5. Рядъ, въ которомъ всѣ члены, начиная со второго, имѣютъ одинаковый геометрическій избытокъ, назовемъ *рядомъ съ постояннымъ геометрическимъ избыткомъ.*

II. Общій видъ ряда съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ.

1. **Теорема.** *Не существуетъ чистаго ряда съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ, равнымъ нулю.*

Пусть

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ u_{n-1},\ u_n,\ u_{n+1}\ ,\ \ldots\ldots$$

есть чистый рядъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ, равнымъ нулю.

Тогда

$$\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}+u_n}=\frac{u_n}{u_{n-1}+u_{n+1}}=\frac{u_{n+1}}{u_n+u_{n+2}}=0,$$

что необходимо предполагаетъ:

$$u_{n-1}=u_n=u_{n+1}=0,$$

откуда

$$u_{n-1}+u_{n+1}=0,$$

т. е.

$$\frac{u_n}{u_{n-1}+u_{n+1}}=\frac{0}{0},$$

что противорѣчитъ предположенію, что данный рядъ—чистый.

2. **Теорема.** *Въ смѣшанномъ ряду съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ, равнымъ нулю, первый членъ отличенъ отъ нуля, остальные члены равны нулю.*

Какъ для неопредѣленности дроби

$$\frac{u_n}{u_{n-1}+u_{n+1}},$$

такъ и для того, чтобы дробь эта равнялась нулю, необходимо, чтобы u_n равнялось нулю.

Значитъ всѣ члены, начиная со второго, равны нулю, благодаря чему избытки всѣхъ членовъ, начиная съ третьяго, неопредѣленны.

Для того, чтобы рядъ былъ смѣшаннымъ рядомъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ, равнымъ нулю, остается воспользоваться первымъ членомъ и сдѣлать его отличнымъ отъ нуля; тогда хоть второй членъ будетъ имѣть избытокъ, равный нулю.

Стало быть, рядъ имѣетъ видъ:

$$a, 0, 0, \ldots \qquad (5).$$

Общій членъ его можно выразить формулой:

$$u_n = aq^{n-1}, \qquad (6)$$

гдѣ a отлично отъ нуля, а q равно нулю.

3. **Теорема.** *Геометрическая прогрессія есть рядъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ.*

Пусть a — первый членъ прогрессіи, q — ея знаменатель.

Если a отлично отъ нуля, а q равно нулю, то какъ разъ имѣемъ смѣшанный рядъ съ избыткомъ 0 (6).

Если только a равно нулю, либо a и q оба равны нулю, то всѣ члены ряда суть нули, избытки же всѣхъ членовъ неопредѣленны. Этотъ рядъ мы отнесли условно (см. I,3) къ рядамъ чистымъ.

Если же и a и q отличны отъ нуля, то ариѳметическій избытокъ произвольнаго n-го члена равенъ

$$\frac{aq^{n-1}}{aq^{n-2} + aq^n} = \frac{q}{1+q^2}, \qquad (7)$$

что и доказываетъ, что ариѳметическій избытокъ геометрической прогрессіи есть величина постоянная для всѣхъ членовъ, если q отлично отъ $\pm i$.

Если же $q = \pm i$, избытки всѣхъ членовъ безконечны, но и такой рядъ мы условились отнести къ рядамъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ (см. I,3).

Примѣчаніе. Если a и q отличны отъ нуля, то прогрессія есть чистый рядъ.

4. **Задача.** *Найти геометрическую прогрессію съ ариѳметическимъ избыткомъ, равнымъ* k.

Если $k = 0$, то, какъ мы уже знаемъ, требованію удовлетворяетъ лишь прогрессія, въ которой a отлично отъ нуля, а q равно нулю; притомъ рядъ получается смѣшанный.

Если k отлично отъ нуля, то, какъ видно изъ формулы (7), a должно быть отлично отъ нуля, а q—удовлетворять ур-ію:

$$\frac{q}{1+q^2} = k,$$

или

$$kq^2 - q + k = 0 \qquad (8)$$

Рѣшая ур-іе (8) относительно q, получимъ два рѣшенія:

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{1-4k^2}}{2k} = \frac{1}{2k} + \sqrt{\frac{1}{4k^2} - 1}$$

$$q_2 = \frac{1-\sqrt{1-4k^2}}{2k} = \frac{2k}{1+\sqrt{1-4k^2}} = \frac{1}{2k} - \sqrt{\frac{1}{4k^2} - 1}$$

Изслѣдуя эти формулы, получимъ:

$$\begin{array}{lll} k = -\infty & q_1 = i;\ q_2 = -i. & \\ k = -{}^1\!/_2 & q_1 = q_2 = -1 & \\ k = 0 & q_1 = \infty,\ q_2 = 0. & (8\ \text{bis}) \end{array}$$

Первое рѣшеніе (см. 8 bis) не годится для численнаго ряда, второе даетъ смѣшанный рядъ съ избыткомъ нуль; итакъ общая формула примѣнима и въ случаѣ $k = 0$.

Далѣе:

$$\begin{array}{ll} k = {}^1\!/_2 & q_1 = q_2 = 1 \\ k = \infty & q_1 = i;\ q_2 = -i. \end{array}$$

Произведеніе корней q_1 и q_2 всегда равно 1, что сразу можно замѣтить, записавъ ур-іе (8) въ видѣ:

$$q^2 - \frac{q}{k} + 1 = 0.$$

Изъ всего вышесказаннаго слѣдуетъ: взявъ за первый членъ прогрессіи произвольное число, отличное отъ нуля, и давая знаменателю всевозможныя, вообще говоря, комплексныя значенія, мы получимъ рядъ прогрессій со всевозможными конечными ариѳметическими избытками, а также и съ безконечнымъ избыткомъ.

При этомъ прогрессіи распредѣляются, такъ сказать, попарно: каждой прогрессіи съ опредѣленнымъ q соотвѣтствуетъ другая прогрессія зъ знаменателемъ $\frac{1}{q}$, имѣющая такой же ариѳметическій избытокъ, какъ и первая. Исключеніе составятъ лишь случаи, когда $q = \pm 1$, или $q = 0$, т. е. когда $k = \pm {}^1\!/_2$, $k = 0$; въ этихъ случаяхъ не будетъ соотвѣтствующей пары.

Мы предполагали a отличнымъ отъ нуля; если $a = 0$, то при произвольномъ q получимъ прогрессію, въ которой избытки всѣхъ членовъ неопредѣленны.

5. **Теорема.** *Если имѣемъ два ряда съ постояннымъ конечнымъ ариѳметическимъ избыткомъ* k, *отличнымъ отъ нуля* *),

---

*) Внимательный читатель пойметъ, что оговорка эта, строго говоря излишняя, въ виду того, что нѣтъ двухъ рядовъ съ избыткомъ 0, выполняющихъ условіе теоремы $u_1 v_2 - v_1 u_2 \lesseqgtr 0$.

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ u_{n-1},\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots\ldots$$

$$v_1,\ v_2,\ \ldots\ldots\ v_{n-1},\ v_n,\ v_{n+1},\ \ldots\ldots$$

такихъ, что выраженіе $u_1v_2 - v_1u_2$ *тоже отлично отъ нуля, то общій членъ* t_n *ряда*

$$t_1,\ t_2,\ \ldots\ldots\ t_{n-1},\ t_n,\ t_{n+1},\ \ldots\ldots,$$

члены котораго опредѣляются уравненіемъ:

$$t_n = k.\ (t_{n-1} + t_{n+1})$$

т. е. чистаго или смѣшаннаго ряда съ тѣмъ же избыткомъ k *или же ряда, избытки всѣхъ членовъ котораго неопредѣленны, равняется*

$$au_n + bv_n,$$

гдѣ a *и* b *суть нѣкоторые постоянные коэффиціенты.*

Рѣшимъ два уравненія

$$au_1 + bv_1 = t_1, \tag{9}$$

$$au_2 + bv_2 = t_2, \tag{10}$$

относительно a и b, что всегда возможно, такъ какъ

$$u_1v_2 - v_1u_2 \gtrless 0.$$

Для доказательства теоремы теперь достаточно прибѣгнуть къ методу индукціи, т. е. доказать, что если,

$$t_{n-1} = au_{n-1} + bv_{n-1}, \tag{11}$$

$$t_n = au_n + bv_n \tag{12}$$

при произвольномъ n, то и

$$t_{n+1} = au_{n+1} + bv_{n+1},$$

а въ этомъ легко убѣдиться.

Назовемъ общій ариѳметическій избытокъ трехъ рядовъ черезъ k. Тогда имѣемъ:

$$u_n = k\,(u_{n-1} + u_{n+1}), \tag{13}$$

$$v_n = k\,(v_{n-1} + v_{n+1}), \tag{14}$$

$$t_n = k\,(t_{n-1} + t_{n+1}). \tag{15}$$

Умноживъ уравненіе (13) на a, уравненіе (14) на b и уравненіе (15) на -1, затѣмъ сложивъ ихъ, получимъ:

$$au_n + bv_n - t_n = k\,(au_{n-1} + bv_{n-1} - t_{n-1} + au_{n+1} + bv_{n+1} - t_{n+1}),$$

или, принимая во вниманіе уравненія (11) и (12):

$$k\,(au_{n+1} + bv_{n+1} - t_{n+1}) = 0.$$

сокращая на k (отличное отъ нуля), имѣемъ:

$$au_{n+1} + bv_{n+1} - t_{n+1} = 0,$$

или

$$t_{n+1} = au_{n+1} + bv_{n+1}.$$

Обратная теорема. *Если имѣемъ два ряда:*

$$u_1,\ u_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ u_{n-1},\ u_n,\ u_{n+1}\ ,\ .\ .\ .\ .\ .$$

и

$$v_1,\ v_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ v_{n-1},\ v_n,\ v_{n+1}\ ,\ .\ .\ .\ .\ .$$

съ однимъ и тѣмъ же конечнымъ ариѳметическимъ избыткомъ, то рядъ, общій членъ котораго есть

$$t_n = au_n + bv_n$$

есть чистый или смѣшанный рядъ съ тѣмъ же избыткомъ, либо рядъ съ неопредѣленнымъ избыткомъ.

Пусть k—ариѳметическій избытокъ двухъ данныхъ рядовъ. Тогда:

$$u_n = k\ (u_{n-1} + u_{n+1}), \tag{16}$$

$$v_n = k\ (v_{n-1} + v_{n+1}). \tag{17}$$

Помножая уравненіе (17) на a, а уравненіе (17) на b и складывая ихъ, получимъ:

$$au_n + bv_n = k[(au_{n-1} + bv_{n-1}) + (au_{n+1} + bv_{n+1})],$$

или:

$$t_n = k\ (t_{n-1} + t_{n+1}),$$

что и доказываетъ теорему.

6. **Теорема.** *Если имѣемъ два ряда съ безконечнымъ ариѳметическимъ избыткомъ*

$$u_1,\ u_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ u_{n-1},\ u_n,\ u_{n+1}\ ,\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$v_1,\ v_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ v_{n-1},\ v_n,\ v_{n+1}\ ,\ .\ .\ .\ .\ .$$

такихъ, что $v_1 u_2 - u_1 v_2$ *отлично отъ нуля, то всякій рядъ*

$$t_1,\ t_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ t_{n-1},\ t_n,\ t_{n+1}$$

чистый или смѣшанный съ безконечнымъ избыткомъ, а также рядъ съ неопредѣленнымъ избыткомъ можно выразить формулой общаго члена его

$$t_n = au_n + bv_n,$$

гдѣ a *и* b*—постоянные коэффиціенты.*

Рѣшимъ два уравненія:

$$au_1 + bv_1 = t_1, \tag{18}$$

$$au_2 + bv_2 = t_2 \tag{19}$$

относительно a и b.

Пусть имѣемъ вообще при произвольномъ n:

$$au_n + bv_n = t_n\,. \qquad (20)$$

Такъ какъ всѣ три ряда, упоминаемые въ теоремѣ, принадлежатъ къ типу, опредѣляемому уравненіемъ (3), то имѣемъ:

$$u_n + u_{n+2} = 0,$$

$$v_n + v_{n+2} = 0,$$

$$t_n + t_{n+2} = 0,$$

откуда:

$$u_n = -u_{n+2},\quad v_n = -v_{n+2},\quad t_n = -t_{n+2},$$

а потому изъ ур—ія (20) слѣдуетъ:

$$a\,.\,(-u_{n+2}) + b\,.\,(-v_{n+2}) = -t_{n+2},$$

или:

$$au_{n+2} + bv_{n+2} = t_{n+2}.$$

Значитъ ур—іе (18) можно распространить на всѣ нечетные, а ур—іе (19) на всѣ четные указатели, что и доказываетъ теорему.

Обратная теорема. *Если имѣемъ два ряда съ безконечнымъ избыткомъ*

$$u_1,\ u_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ u_{n-1},\ u_n,\ u_{n+1}\ ,\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$v_1,\ v_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ v_{n-1},\ v_n,\ v_{n+1}\ ,\ .\ .\ .\ .\ .$$

то рядъ, общій членъ котораго есть

$$t_n = au_n + bv_n$$

есть рядъ съ избыткомъ либо безконечнымъ, либо неопредѣленнымъ.

Такъ какъ

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 0,$$

$$v_{n-1} + v_{n+1} = 0,$$

то

$$au_{n-1} + bv_{n-1} + au_{n+1} + bv_{n+1} = t_{n-1} + t_{n+1} = 0.$$

7. Слѣдствія изъ теоремъ 5, 6 гл. II-й.

1) Если найдемъ два такихъ ряда

$$u_1,\ u_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ u_n\ ,\ .\ .\ .\ .$$

$$v_1,\ v_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ v_n\ ,\ .\ .\ .\ .$$

съ конечнымъ ариѳметическимъ избыткомъ, что $u_1v_2 - v_1u_2 \gtrless 0$, то рядъ, общій членъ котораго есть

$$t_n = au_n + bv_n \qquad (21),$$

есть самый общій видъ ряда съ тѣмъ же конечнымъ ариѳметическимъ избыткомъ; онъ же заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай, рядъ съ неопредѣленнымъ избыткомъ.

Доказательство. — По теоремѣ, обратной теор. 5, при всякихъ a и b, рядъ (21) есть чистый или смѣшанный рядъ съ тѣмъ же конечнымъ избыткомъ, какъ и два взятыхъ ряда; можетъ случиться и то, что рядъ будетъ съ неопредѣленнымъ избыткомъ.

По прямой теоремѣ, въ формулу (21) включены всѣ возможные ряды съ тѣмъ же избыткомъ.

2) Если имѣемъ два ряда

$$u_1,\ u_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ u_n\ ,\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$v_1,\ v_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ v_n\ ,\ .\ .\ .\ .\ .$$

съ безконечнымъ избыткомъ такихъ, что $u_1v_2 - v_1u_2$ не нуль, то рядъ, общій членъ котораго есть

$$t_n = au_n + bv_n,$$

заключаетъ въ себѣ всѣ чистые и смѣшанные ряды съ безконечнымъ избыткомъ, а также рядъ съ избыткомъ неопредѣленнымъ.

Доказательство — аналогичное предыдущему.

8. Общій видъ ряда съ безконечнымъ избыткомъ и съ конечнымъ, но отличнымъ отъ $\pm\,^1/_2$.

Возьмемъ въ прогрессіяхъ, разсматриваемыхъ въ параграфѣ 4, за первый членъ единицу.

Тогда прогрессіи:

$$1,\ q,\ q^2\ ,\ .\ .\ .\ .\ q^{n-1}\ ,\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$1,\ \frac{1}{q},\ \frac{1}{q^2}\ ,\ .\ .\ .\ .\ \frac{1}{q^{n-1}}\ ,\ .\ .\ .\ .\ .$$

при перемѣнномъ q обѣ могутъ быть рядами съ какимъ угодно одинаковымъ ариѳметическимъ избыткомъ, отличнымъ отъ 0, если q не 0.

Выраженіе $u_1v_2 - v_1u_2$ для этихъ двухъ рядовъ приводится къ

$$\frac{1}{q} - q = \frac{1-q^2}{q} \qquad (22)$$

Обозначая ариѳметическій избытокъ, общій обѣимъ прогрессіямъ, черезъ k, мы найдемъ, что дробь (22) не нуль, если k не $\pm\,^1/_2$, или, что все равно, q не ± 1.

А потому формула

$$t_n = aq^{n-1} + \frac{b}{q^{n-1}}, \qquad (23)$$

по слѣдствію изъ теоремъ (II, 5 и 6) навѣрное заключаетъ въ себѣ всѣ возможные ряды со всевозможными ариѳметическими избытками, кромѣ $k = 0$ и $k = \pm\,^1/_2$ — случаи, о которыхъ мы пока не вправѣ заключить, примѣнима ли сюда эта формула —, а также и рядъ съ неопредѣленнымъ избыткомъ, если онъ существуетъ; а что онъ существуетъ, убѣждаемся, полагая $a = b = 0$.

Если положить раньше $b = 0$, потомъ $q = 0$, прійдемъ къ формулѣ (6).

Значитъ въ случаѣ $k = 0$ формула (23) также годится.

Если же положить въ этой формулѣ $q = \pm 1$, то, по теоремѣ, обратной теоремѣ (II, 5), она дастъ ряды съ избыткомъ $^1/_2$ и $-^1/_2$, но нѣтъ ли еще другихъ рядовъ съ такими избытками, мы поручиться не можемъ, такъ какъ прямая теор. 5. уже не можетъ быть примѣнена къ парѣ разсматриваемыхъ прогрессій.

9. **Общій видъ рядовъ съ постоянными ариѳметическими избытками $\pm\, ^1/_2$.**

Если $q = \pm 1$, то $k = \pm\, ^1/_2$, но обѣ прогрессіи становятся тождественными. (См. II, 8).

Возьмемъ одну изъ этихъ прогрессій при $q = 1$, именно:

$$1,\ 1,\ 1\ , \ldots \ldots 1\ , \ldots \ldots$$

и рядъ
$$0,\ 1,\ 2\ , \ldots \ldots n-1\ , \ldots \ldots \ldots ,$$

т. е. рядъ натуральныхъ чиселъ.

Ариѳметическій избытокъ любого $(n+1)$-го члена натуральнаго ряда чиселъ есть

$$\frac{n}{n-1+n+1} = {}^1/_2,$$

поэтому натуральный рядъ есть рядъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ $^1/_2$.

Выраженіе $u_1 v_2 - v_1 u_2$ для двухъ написанныхъ нами рядовъ не нуль, а потому рядъ

$$t_n = a + b(n-1), \qquad (24)$$

т. е. ариѳметическая прогрессія, есть общій видъ ряда съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ $^1/_2$.

Если возьмемъ прогрессію $u_n = (-1)^{n-1}$, знаменатель которой есть -1, а потому избытокъ равенъ $-\,^1/_2$, и рядъ $t_n = (-1)^{n-1}(n-1)$, имѣющій постоянный ариѳметическій избытокъ тоже $-\,^1/_2$, въ чемъ легко убѣдиться, то отсюда выведемъ, что общій членъ ряда съ избыткомъ $-\,^1/_2$ есть:

$$t_n = (-1)^{n-1}[a + b(n-1)] \qquad (25)$$

10. Формула (23) даетъ общее рѣшеніе вопроса при q, отличномъ отъ ± 1, хотя бы и сколь угодно близкомъ къ ± 1.

Обозначая это значеніе черезъ $\pm(1+\varepsilon)$, получимъ:

$$t_n = \frac{a[\pm(1+\varepsilon)]^{2(n-1)} + b}{[\pm(1+\varepsilon)]^{n-1}}. \qquad (26)$$

Общій членъ ряда съ избыткомъ $\pm\,^1/_2$ можно разсматривать, какъ предѣлъ второй части ур-ія (26) при приближеніи ε къ нулю.

Называя этотъ искомый членъ черезъ τ_n, получимъ:

$$\tau_n = \lim t_n = \frac{\lim \{ a [\pm (1+\varepsilon)]^{2(n-1)} + b\}}{\lim [\pm (1+\varepsilon)]^{n-1}} =$$

$$= \frac{\lim[a(1+\varepsilon)^{2(n-1)} + b]}{(\pm 1)^{n-1}} = (\pm 1)^{n-1} \lim[a(1+\varepsilon)^{2(n-1)} + b].$$

Прибѣгая къ формулѣ бинома, получимъ:

$$\tau_n = (\pm 1)^{n-1} \lim [a + a\varepsilon(n-1) + a\varepsilon^2 C + a\varepsilon^3 C' + \ldots + a\varepsilon^{2(n-1)} + b],$$

гдѣ C, C', . . . — биноміальные коэффиціенты.

При сколь угодно маломъ ε всегда можно выбрать a и b такъ, чтобы выполнялись равенства:

$$a + b = A,$$

$$a\varepsilon = B,$$

гдѣ A и B — конечныя постоянныя.

Поэтому:

$$\tau_n = (\pm 1)^{n-1} [A + B(n-1)] \tag{27}$$

Уравненіе (27) есть ни что иное, какъ формулы (24) и (25), соединенныя въ одной формулѣ.

11. Чистые и смѣшанные ряды съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ — Мы уже знаемъ (II, 1 и 2), что есть лишь смѣшанные ряды съ избыткомъ нуль.

Такъ какъ членъ ряда, равный нулю, имѣетъ избыткомъ либо нуль, либо неопредѣленный избытокъ, то, чтобы членъ ряда съ постояннымъ избыткомъ, не равнымъ нулю, имѣлъ неопредѣленный избытокъ, необходимо и достаточно, чтобы членъ этотъ равнялся нулю.

Отсюда слѣдуетъ, что есть лишь одинъ рядъ, всѣ члены котораго имѣютъ неопредѣленный избытокъ, именно тотъ, всѣ члены котораго равны нулю.

Отсюда также слѣдуетъ, что для того, чтобы рядъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ былъ смѣшанный, необходимо и достаточно, чтобы въ немъ хоть одинъ членъ съ указателемъ выше 1, равнялся нулю.

Поэтому уравненіе

$$aq^{p-1} + \frac{b}{q^{p-1}} = 0; \text{ или: } aq^{2(p-1)} + b = 0;$$

или:

$$b = -aq^{2(p-1)} \tag{28}$$ *)

выражающее, что p-й членъ въ ряду (23), т. е. въ ряду съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ, отличнымъ отъ $\pm 1/2$, равенъ нулю, есть условіе того, чтобы рядъ этотъ былъ смѣшанный.

Точно такъ же уравненіе

*) Въ формулахъ (28) и (29) p — цѣлое положительное число, большее единицы.

$$a + b(p - 1) = 0,$$

или:

$$a = - b(p - 1) \qquad (29)$$

выражаетъ условіе, при которомъ рядъ съ постояннымъ избыткомъ $\pm {}^1/_2$ есть смѣшанный.

Поэтому, если въ формулѣ (23) a выберемъ произвольно, а b сдѣлаемъ, согласно съ уравненіемъ (28), равнымъ $- aq^{2(p-1)}$, гдѣ p не менѣе двухъ, то получимъ уравненіе:

$$t_n = a(q^{n-1} - q^{2p-n-1}). \qquad (30)$$

Уравненіе это даетъ общій видъ смѣшаннаго ряда съ избыткомъ, не равнымъ $\pm {}^1/_2$. Конечно, a въ ур іи (30) отлично отъ нуля.

Точно такъ же, если въ формулахъ (24), (25) положимъ b отличнымъ отъ нуля, а a равнымъ $- b(p-1)$, гдѣ p — число цѣлое, положительное, не меньшее 2-хъ, то получимъ выраженіе

$$t_n = (-1)^{n-1} b . (n - p) \qquad (31),$$

дающее общій видъ смѣшаннаго ряда съ ариѳметическимъ избыткомъ $\pm {}^1/_2$.

Наоборотъ, если въ формулѣ (23) q и a выберемъ произвольно, а b сдѣлаемъ не равнымъ ни одному изъ ряда чиселъ

$$- aq^2, - aq^4, \ldots\ldots - aq^{2(p-1)},$$

то получимъ чистый рядъ съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ, отличнымъ отъ $\pm {}^1/_2$.

Точно такъ же, если въ формулахъ (24), (25), выбравъ b произвольно, лишь бы отличнымъ отъ нуля, дадимъ a значеніе, отличное отъ ряда чиселъ

$$- b, - 2b, \ldots\ldots - (p-1). b,$$

то получимъ чистый рядъ съ избыткомъ $\pm {}^1/_2$.

Уравненіе (29) имѣетъ лишь одинъ корень относительно p; значитъ смѣшанные ряды съ избыткомъ $\pm {}^1/_2$ имѣютъ лишь одинъ членъ съ неопредѣленнымъ избыткомъ.

Не таково уравненіе (28); оно можетъ имѣть и больше одного рѣшенія, если только выполняется уравненіе

$$- aq^{2(p-1)} = - aq^{2(x-1)} \qquad (32)$$

при x, не равномъ p.

Для этого же необходимо и достаточно, чтобы мы имѣли:

$$q^{2(p-x)} = 1 \qquad (33),$$

т. е. q должно быть однимъ изъ корней четной степени изъ 1.

Пусть $2m$ есть наименьшая степень, по возвышеніи въ которую q даетъ уже 1.*)

*) Напримѣръ, одно изъ значеній $\sqrt[4]{1}$ есть -1; но уже $(-1)^2 = 1$.

Тогда въ ряду послѣдовательныхъ четныхъ степеней q единица будетъ повторяться безконечное число разъ.

Поэтому уравненіе (32) удовлетворится не только для $x=p$, но и при $x=p\pm\vartheta.m$, гдѣ ϑ — цѣлое число.

Значитъ, нулями будутъ всѣ члены съ указателемъ $p\pm\vartheta.m$.

А потому, если q въ формулѣ (31) равно одному изъ корней ур—ія

$$a^{2m}-1=0, \qquad (33)$$

гдѣ m цѣлое, то безчисленное число членовъ имѣютъ неопредѣленные избытки.

Если же q не есть корень четной степени изъ единицы, то формула (31) даетъ всѣ возможные ряды, въ которыхъ лишь одинъ p-й членъ имѣетъ неопредѣленный избытокъ.

12. **Нѣкоторыя слѣдствія изъ предыдущихъ формулъ. — Задача.** *Найти общій видъ ряда съ безконечнымъ избыткомъ.*

Чтобы получить общій видъ ряда съ безконечнымъ избыткомъ, надо, по задачѣ 4-й, положить $q=i$ въ формулѣ (23).

Тогда рядъ принимаетъ видъ:

$$A+B;\ Ai-Bi;\ -(A+B);\ -(Ai-Bi);\ \ldots. \qquad (34)$$

Четыре первыхъ члена въ ряду (34) будутъ повторяться неопредѣленное число разъ.

Полагая $$A+B=M,\ Ai-Bi=N,$$

получимъ рядъ (34) въ видѣ:

$$M,\ N,\ -M,\ -N,\ M,\ N,\ -M,\ -N\ ,\ \ldots\ldots.$$

Полагая или только M, или только N равнымъ нулю, получимъ смѣшанный рядъ съ безконечнымъ избыткомъ.

13. **Задача.** *Найти общій видъ ариѳметическаго избытка въ смѣшанныхъ рядахъ съ постояннымъ избыткомъ, имѣющихъ безконечное число членовъ съ неопредѣленнымъ избыткомъ.*

Для рѣшенія задачи достаточно въ формулу (7) подставить одинъ изъ корней ур—ія (33).

Корень этого уравненія равенъ вообще *)

$$\alpha=\cos\frac{2\pi l}{2m}+i\sin\frac{2\pi l}{2m}=\cos\frac{\pi l}{m}+i\sin\frac{\pi l}{m}.$$

Чтобы получить $2m$ корней ур—ія (33) изъ этой формулы, надо l дать рядъ значеній $0, 1, 2, \ldots 2m-1$.

По формулѣ (7), называя искомый избытокъ черезъ k, имѣемъ:

*) См. Алгебра Бертрана (въ обработкѣ Билибина), § 383, стр. 354.

$$k=\frac{\cos\frac{\pi l}{m}+i\sin\frac{\pi l}{m}}{1+\left(\cos\frac{\pi l}{m}+i\sin\frac{\pi l}{m}\right)^2}$$

Для удобства дальнѣйшихъ преобразованій, обозначимъ $\frac{\pi l}{m}$ черезъ x. Тогда

$$k=\frac{\cos x+i\sin x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x+2\,i\sin x.\cos x}=\frac{\cos x+i\sin x}{2\cos^2 x+2\,i\cos x\sin x}=\frac{1}{2\cos x},$$

или:

$$k=\frac{1}{2\cos\frac{\pi l}{m}}={}^1/_2.\sec\frac{\pi l}{m} \qquad (35)$$

Итакъ, ариѳметическій избытокъ смѣшанныхъ рядовъ съ безконечнымъ числомъ членовъ, имѣющихъ неопредѣленный избытокъ, равенъ половинѣ секанса нѣкоторой раціональной части π.

Наоборотъ, если въ ряду (23) k равно

$${}^1/_2\sec\frac{\pi l}{m},$$

причемъ, кромѣ того, выполняется условіе (28), то рядъ есть смѣшанный, въ которомъ есть безконечное число членовъ съ неопредѣленнымъ избыткомъ.

Это обратное предложеніе слѣдуетъ изъ ур—ія (8), выражающаго постоянную связь между q и k.

Е. Буницкій (Одесса).

(Окончаніе слѣдуетъ).

Замѣтка о задачѣ Паппуса.

Въ „Приложеніи алгебры къ геометріи" П. Флорова изданія 1894 г. сказано, что способъ Ньютона для рѣшенія частнаго случая задачи Паппуса, когда данный уголъ прямой, утрачиваетъ свою простоту, если его распространить на случай непрямыхъ угловъ. Но едва ли не напрасно авторъ упомянутаго руководства находитъ способъ Ньютона, распространенный на всѣ случаи задачи Паппуса, сложнѣе того, который имъ указывается какъ наиболѣе простой.

Пусть будетъ данъ уголъ XOY и на равнодѣлящей его точка M. Положимъ, что линія AB, проходящая чрезъ точку M и пересѣкающая стороны OX и OY соотвѣтственно въ точкахъ A и B, имѣетъ данную длину l. Обозначимъ отрѣзокъ BM чрезъ y. Для опредѣленія его про-

водимъ черезъ точку M прямыя, параллельныя сторонамъ OB и OA. Пусть эти прямыя пересѣкаютъ стороны OA и OB въ точкахъ C и D. Кромѣ того изъ точекъ B и M опускаемъ перпендикуляры BF и ME на прямыя MD и OA. Обозначимъ каждую сторону ромба ODMC черезъ a и отрѣзокъ OE—черезъ b. Изъ подобія треугольниковъ BDM и MCA находимъ

$$\frac{BD}{MC}=\frac{DF}{CE}=\frac{BM}{MA} \text{ или } \frac{BD}{a}=\frac{DF}{\pm(b-a)}=\frac{y}{l-y}.$$

Здѣсь знакъ — относится къ тому случаю, когда уголъ XOY тупой.

Такимъ образомъ

$$\overline{BD}^2(l-y)^2=a^2y^2,\quad DF=\frac{\pm(b-a)y}{l-y}.$$

Изъ треугольника BDM находимъ

$$\overline{BD}^2=\overline{DM}^2+\overline{BM}^2-2\overline{DM}.\ \overline{FM}.$$

Но $$FM=a\mp DF.$$

Поэтому

$$\overline{BD}^2=a^2+y^2-2a\left(a-\frac{(b-a)y}{l-y}\right)=y^2-a^2+\frac{2a(b-a)y}{l-y}$$

Слѣдовательно,

$$y^2(l-y)^2-a^2(l-y)^2+2a(b-a)y(l-y)=a^2y^2.$$

Упрощая это уравненіе, находимъ

$$y^2(l-y)^2+2aby(l-y)-a^2l^2=0.$$

Получается уравненіе 4-ой степени относительно y, но квадратное относительно $y(l-y)$.

Проводимъ изъ точки B прямую BK до пересѣченія съ MC, такъ чтобы уголъ MBK равнялся углу XOY. Тогда изъ подобія треугольниковъ BMK и CMA находимъ

$$\frac{BM}{MK}=\frac{CM}{MA} \text{ или } \frac{y}{x}=\frac{a}{l-y}.$$

Такимъ образомъ $y(l-y)=ax$.

Послѣ этого найденное ранѣе уравненіе принимаетъ видъ

$$a^2x^2+2a^2bx-a^2l^2=0 \text{ или } x^2\mp 2bx-l^2=0.$$

Въ случаѣ, когда уголъ XOY прямой, приходимъ къ такому же уравненію, только $b=a$.

Такимъ образомъ x имѣетъ два значенія: положительное MK и отрицательное — MK′. Построивъ эти отрѣзки, мы должны на первомъ описать дугу, вмѣщающую уголъ равный данному, а на второмъ—дугу, вмѣщающую уголъ, который съ даннымъ составляетъ 180°. Чтобы убѣдиться въ послѣднемъ, вообразимъ, что изъ точки M проведена прямая

MA'B', пересѣкающая OX въ A' и продолженіе OY въ B', такъ что $A'B' = l$. Тогда уголъ MCA' треугольника MCA' равенъ $180^0 - \angle XOY$. Слѣдовательно, уголъ MB'K' подобнаго треугольника долженъ имѣть ту-же величину.

Обозначимъ данный уголъ чрезъ ω.

Тогда

$$\cos\omega = \frac{b-a}{a}, \quad \sin\omega = \frac{\sqrt{b(2a-b)}}{a}.$$

Разстояніе точки M отъ сторонъ угла равно $a\sin\omega$.

Радіусы дугъ, описанныхъ на MK и MK' будутъ

$$\frac{x}{2\sin\omega} = \frac{MK}{2\sin\omega} \text{ и } \frac{-x}{2\sin\omega} = \frac{MK'}{2\sin\omega}.$$

Чтобы эти дуги пересѣкали прямую OY, должно удовлетворяться неравенство

$$\frac{x}{2\sin\omega} > a\sin\omega \mp \frac{x\cos\omega}{2\sin\omega},$$

гдѣ x обозначаетъ MK или MK' и верхній знакъ соотвѣтствуетъ $x = \overline{MK}$.

Взявъ верхній знакъ, находимъ

$$x > \frac{2a\sin^2\omega}{1+\cos\omega} \text{ или } x > 4a - 2b, \text{ откуда}$$

$$-b + \sqrt{b^2+l^2} > 4a - 2b \text{ и } l^2 > 8a(2a-b).$$

Взявъ нижній знакъ, находимъ;

$$x > \frac{2a\sin^2\omega}{1-\cos\omega} \text{ или } x > 2b, \text{ откуда}$$

$b + \sqrt{b^2+l^2} > 2b$ и $+\sqrt{b^2+l^2} > b$, что очевидно при всякихъ значеніяхъ b и l.

Такимъ образомъ предложенная задача имѣетъ 4 рѣшенія, если $l^2 > 8a(2a-b)$; 3 рѣшенія, если $l^2 = 8a(2a-b)$, и 2 рѣшенія, если $l^2 < 8a(2a-b)$.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

ИЗОБРѢТЕНІЯ и ОТКРЫТІЯ.

Аккумуляторы „Тріо“.—Эти аккумуляторы, изобрѣтенные В. Бари, В. Святскимъ и Я. Ветштейномъ, отличаются отъ большинства употребляемыхъ нынѣ типовъ отсутствіемъ рѣшетки, составляющей основу пластинки и поддерживающей активную массу. Пластины аккумулято-

ровъ „Тріо“ готовятся изъ однородной массы, получаемой посредствомъ отливки и преобразуемой при помощи электролиза въ губчатый свинецъ и перекись свинца, обладаютъ равномѣрной степенью пористости и кромѣ того снабжены многочисленными отверстіями для свободной циркуляціи сѣрной кислоты. Каждая пластина снабжается наружной рамкой съ переплетомъ, отлитой изъ сплава свинца съ сурьмой. Благодаря пористости и продыравленности пластинъ и крѣпости кислоты (33°B), аккумуляторы „Тріо“ обладаютъ высокимъ напряженіемъ тока во все время разряда. Отсутствіе тяжелой свинцовой основы дало возможность значительно уменьшить вѣсъ металлическаго свинца по отношенію къ дѣйствующей массѣ, а слѣдовательно и вѣсъ самаго аккумулятора: аккумуляторъ въ 10 вольтъ изъ пяти элементовъ, при емкости въ 50 амперъ-часовъ, вѣситъ вмѣстѣ съ наружнымъ деревянымъ ящикомъ всего лишь 1½ пуда. Такой аккумуляторъ (размѣры его: длина 17,5 дюйма, ширина 7 д., вышина 8 д.) можетъ поддерживать горѣніе одной лампочки накаливанія въ 3 свѣчи въ продолженіе 50 часовъ.

Аккумуляторы „Тріо“ обладаютъ значительной емкостью (на 1 кило вѣса пластинокъ—16—20 амперъ-часовъ) и приспособлены главнымъ образомъ для употребленія въ качествѣ переносныхъ аккумуляторовъ, т. е. для освѣщенія экипажей, вагоновъ, частныхъ квартиръ, для движенія городскихъ электрическихъ желѣзныхъ дорогъ и небольшихъ судовъ.

Для фабрикаціи этихъ аккумуляторовъ устраивается въ Петербургѣ (Большая Монетная, 16) большой спеціальный аккумуляторный заводъ. — (Почт. Тел. Журналъ).

Бумажные телеграфные столбы.—Столбы эти готовятся изъ бумажной массы съ примѣсью буры, соли и другихъ веществъ, придающихъ имъ необходимую твердость. Затѣмъ масса прессуется въ гидравлическихъ прессахъ и пріобрѣтаетъ здѣсь форму полыхъ цилиндровъ.

Говорятъ, что эти столбы лучше выдерживаютъ атмосферныя вліянія, чѣмъ деревяные и значительно легче ихъ.

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Электроскопъ съ тремя золотыми листками. — Приборъ этотъ представляетъ общеизвѣстный электроскопъ съ золотыми листками, въ которомъ вмѣсто двухъ листковъ имѣется ихъ три.

Листки эти одинаковаго размѣра и скрѣплены вмѣстѣ при помощи кусочка оловяной бумаги, которымъ обернутъ одинъ изъ концовъ всѣхъ трехъ листковъ. Оловяная бумага закрѣпляется въ зажимѣ, которымъ заканчивается изолированный стержень электроскопа. Прибавленіе третьяго листка представляетъ слѣдующія преимущества:

1) Когда электроскопъ заряжается, то средній листокъ остается вертикальнымъ, а оба боковыхъ отклоняются отъ него каждый на одинъ и тотъ же уголъ. Благодаря этой неподвижности средняго листка, онъ

служитъ какъ бы мѣткой, отъ которой удобно начинать отсчетъ угловъ отклоненія остальныхъ листковъ. Самый отсчетъ производится по прозрачной скалѣ, укрѣпленной на передней стѣнкѣ металлической клѣтки, въ которой помѣщенъ электроскопъ, при помощи достаточно удаленнаго визира.

2) Чувствительность прибора значительно увеличивается по сравненію съ электроскопомъ о двухъ листкахъ, не смотря на то, что зарядъ распредѣляется здѣсь на бо́льшую поверхность. Дѣйствительно, каждый крайній листокъ отталкивается центральнымъ листкомъ въ четыре раза сильнѣе, нежели другимъ крайнимъ, и простой разсчетъ показываетъ, что для малыхъ угловъ отклоненія чувствительность увеличивается въ отношеніи 1 : 1,49. При большихъ углахъ отклоненія чувствительность увеличивается еще больше.

3) Въ обыкновенномъ электроскопѣ съ двумя листками чувствительность становится равной нулю, когда каждый листокъ отклоняется на 90^0 отъ вертикали. Это предѣльный уголъ отклоненія, вблизи котораго дальнѣйшее увеличеніе заряда не увеличиваетъ расхожденія листковъ. Въ электроскопѣ съ тремя листками предѣльный уголъ достигаетъ 120^0 вмѣсто 90^0, т. е. приборъ можетъ служить для болѣе высокихъ потенціаловъ, нежели обыкновенный электроскопъ.

Это удачное видоизмѣненіе электроскопа предложено *L. Benoist* (C. R. CXXIII, 171).

В. Г.

Удобный приборъ для удаленія изолирующаго слоя съ электрическихъ проводовъ изобрѣтенъ американцемъ И. Р. Гемпгиль. Приборъ состоитъ изъ куска стали съ нѣсколькими дугообразными углубленіями. Въ одномъ углубленіи сдѣланы острые зубцы въ продольномъ, а въ другомъ—въ поперечномъ направленіи. При поворачиваніи стали углубленіями вокругъ изолированной проволоки продольные зубцы надрѣзываютъ изолировку, а поперечные стираютъ ее съ проволоки и вмѣстѣ съ тѣмъ очищаютъ проволоку въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ снята изолировка. (Почт. Тел. Журналъ).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

По полученнымъ въ послѣднее время свѣдѣніямъ Фритіофъ Нансенъ прибылъ 1 августа (н. с.) въ Варде съ лейтенантомъ Іогансеномъ. 2 августа прошлаго года они оставили пароходъ „Фрамъ“, который былъ затертъ льдами, подъ 84^0 с. ш и, желая изслѣдовать море въ болѣе сѣверномъ направленіи, чѣмъ это можно было сдѣлать на пароходѣ „Фрамъ“, совершили путешествіе по льду. Они прошли черезъ полярное море къ сѣверу отъ Новой Сибири и изслѣдовали пространство *до* $84^0 15'$, не найдя никакой земли сѣеврнѣе 82^0. Всего лишь $3^3/4^0$ отдѣляли ихъ отъ полюса. Не располагая достаточнымъ количествомъ собакъ и встрѣтивъ непроходимые льды, Нансенъ долженъ былъ повернуть къ югу, къ землѣ Франца-Іосифа. Здѣсь онъ нашелъ зимнюю стоянку Джексона и провелъ въ ней $1^1/_2$ мѣсяца, питаясь медвѣжьимъ мясомъ и китовьимъ жиромъ, пока сюда не при-

былъ англійскій пароходъ „Виндвардъ", доставившій провіантъ экспедиціи Джексона. На „Виндвардѣ" отважные путешественники возвратились въ Норвегію и прибыли въ Варде 1-го августа.

Пароходъ „Фрамъ" вмѣстѣ со льдомъ понесло къ западу. Полагаютъ, что онъ приплыветъ къ Шпицбергену.

Благодаря упорному сѣверному вѣтру Андрэ до сихъ поръ не началъ своего воздушнаго путешествія къ сѣверному полюсу. Быть можетъ полетъ вовсе не состоится въ этомъ году, хотя всѣ приготовленія къ экспедиціи закончены и шаръ наполненъ.

Въ прошломъ номерѣ „Вѣстника" мы помѣстили нѣкоторыя свѣдѣнія объ автоматической телефонной системѣ г. Апостолова-Бердичевскаго, заимствованныя нами изъ № 11—12 „Электричества" (1896 г. стр. 167). Оказывается однако, что вопросъ о томъ, кому принадлежитъ это изобрѣтеніе,—вопросъ спорный. Въ № 200 „Одесскаго Листка" за настоящій годъ напечатано слѣдующее письмо въ редакцію:

„М. Г., г. редакторъ!

„Автоматическая телефонная система", которую г. Бердичевскій выдаетъ за свою, есть ничто иное, какъ одинъ изъ первоначальныхъ варьянтовъ моего изобрѣтенія, купленнаго англійскими капиталистами. Самъ г. Бердичевскій не только ничего не изобрѣталъ, но онъ полнѣйшій невѣжда въ техникѣ и въ особенности въ области электричества, что можетъ засвидѣтельствовать и г. Тимченко, успѣвшій достаточно хорошо познакомиться съ упомянутымъ господиномъ еще въ то время, когда послѣдній ходилъ въ его механическую мастерскую съ цѣлью вывѣдать секретъ строющейся тамъ модели. У меня имѣется оффиціальное письмо почтеннаго механика Новороссійскаго университета, въ которомъ онъ прямо называетъ г. Бердичевскаго невѣждой въ электротехникѣ, человѣкомъ, лишеннымъ самыхъ элементарныхъ познаній. Долженъ замѣтить, что это уже не первая попытка похитить у меня „автоматическую телефонную станцію". Еще въ концѣ прошлаго года, одинъ русскій чертежникъ обивалъ пороги брюссельскихъ капиталистовъ, предлагая имъ точную копію моего изобрѣтенія. Этотъ чертежникъ раньше „работалъ" вмѣстѣ съ г. Бердичевскимъ. Какъ потомъ выяснилось, оба они составили планъ обобрать меня, но поссорились и каждый сталъ дѣйствовать за собственный страхъ, одинъ въ Бельгіи, а другой въ Англіи. На мое счастье, контрафакторы не были вполнѣ знакомы съ моимъ изобрѣтеніемъ, а дальнѣйшія измѣненія, сдѣланныя въ немъ мною, согласно требованіямъ экспертовъ, окончательно поставили ихъ въ тупикъ.

„Конечно, „знаменитому" изобрѣтателю гальваническаго элемента, коимъ можно освѣщать цѣлый городъ, и подводной лодки, дающей возможность переплыть въ 24 часа океанъ, ничего не стоитъ придумать „телефонную систему" не только безъ дѣвицъ, но даже безъ проволокъ. У него, какъ и у незабвеннаго Ивана Александровича Хлестакова, все это какъ-то вдругъ само дѣлается. Сидитъ это, примѣрно, герой гальваническаго элемента и другихъ диковинъ въ лабораторіи у Эдиссона, въ Менло-Паркѣ, и распиваетъ съ нимъ какой-нибудь эдакій флоуроскопическій чай— и вдругъ Эдиссонъ ему говоритъ: „изобрѣти, братецъ Апостоловъ, телефонъ безъ дѣвицъ".—Изволь, братецъ, отвѣчаетъ тотъ,—мнѣ онѣ самому тоже давнымъ-давно надоѣли. И черезъ пять минутъ задача рѣшена. Барышни за штатомъ, помѣщеніе центральной станціи отдано подъ магазинъ, а проволоки замѣнены водопроводной сѣтью. „Коробка-манипуляторъ" совершила свое дѣло легко, быстро и къ полному удовольствію автора брошюрки: „Телефонная система". Только лица, кое-что смыслящія въ электротехникѣ и телефоніи, отлично понимаютъ, какая разница между развязной болтовней лондонскаго генія, залетѣвшаго въ Ростовъ (почему-то именно въ Ростовѣ появилась упомянутая брошюра) и дѣйствительностью.

„Какъ ни проста на первый взглядъ задача автоматической телефонной комуникаціи, она заключаетъ въ себѣ трудности, почти неодолимыя. Такъ, автоматическій телефонъ долженъ быть незатѣйливъ, проченъ, удобопонятенъ и проч. Онъ долженъ работать во всякую погоду, не подвергаться порчѣ и быть доступенъ каждому, даже ребенку. Хотя многіе специалисты отозвались одобрительно о моемъ изобрѣтеніи, доказательствомъ чему служатъ сотни тысячъ франковъ, затраченныя на привиллегіи, экспертизы и модели, все-таки окончательное мнѣніе о немъ нельзя будетъ себѣ составить до тѣхъ поръ, пока новая система не подвергнется испытанію въ широкихъ размѣрахъ, т. е. пока практика не подтвердитъ теорію.

„До сего времени мнѣ не хотѣлось-бы ничего говорить въ печати объ автоматическомъ телефонѣ, но я вызванъ на эти строки возмутительными продѣлками цѣлой банды проходимцевъ, силящейся не только вырвать изъ моихъ рукъ изобрѣтеніе, надъ которымъ я работаю болѣе пяти лѣтъ, но и всячески профанировать его за границею и дома.

„Еще одно слово. Меня читающая публика знаетъ по моей 18-лѣтней журнальной дѣятельности. Можетъ быть она желаетъ знать, кто такой тотъ господинъ, который оспариваетъ у меня,—или, наоборотъ, у котораго я оспариваю, честь изобрѣтенія? Вотъ его прошлое:

„Образованія г. Бердичевскій не получилъ никакого, ни дома, ни въ учебномъ заведеніи и въ полномъ смыслѣ малограмотный. Въ концѣ восьмидесятыхъ годовъ онъ очутился въ Парижѣ, гдѣ вскорѣ былъ засаженъ въ Мазасъ за кражу и проживательство подъ именемъ князя Кипіани. Отбывъ наказаніе, онъ изъ князя Кипіани, а въ дѣйствительности карасубазарскаго мѣщанина Зельмана Менделева Бердичевскаго, превратился въ лейбъ-гвардейца и „доктора наукъ“ Леонида Апостолова, „изобрѣлъ“ пресловутый гальваническій элементъ, за который получилъ у герцога Латреймуля 6500 фр. (возвращенные потомъ по принадлежности) и снова попалъ въ тюрьму, на сей разъ въ г. Екатеринославѣ, гдѣ, по увѣреніямъ мѣстныхъ „Губ. Вѣдом.“,—„геній его имѣетъ массу поклонниковъ“. Въ концѣ 1894 года, г. Бердичевскій дѣлаетъ новую попытку водвориться въ Парижѣ, но опять неудачно: 25 февраля 1895 года г. Бердичевскій, онъ-же докторъ наукъ Леонидъ Апостоловъ, онъ же князь Кипіани и пр., высылается административнымъ порядкомъ навсегда изъ Франціи. Перекочевавъ въ Брюссель, онъ не сходится съ бельгійской полиціей во взглядахъ на общественную безопасность вообще и на изобрѣтательные таланты въ частности и поспѣшно уѣзжаетъ въ Англію, гдѣ находится и понынѣ. Гдѣ нашъ герой очутится завтра—сказать пока не берусь“.

М. Фрейденбергъ. Парижъ, 7 августа 1896 г.

Конечно время выяснитъ, кому изъ обоихъ изобрѣтателей принадлежитъ „автоматическая телефонная система“ и имѣетъ ли вообще какое нибудь значеніе это изобрѣтеніе. Не въ пользу, г. Фрейденберга говоритъ только то обстоятельство, что онъ удѣляетъ въ своемъ письмѣ такъ много мѣста личности г. Бердичевскаго и такъ мало выясняетъ дѣло.

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ ВЪ 18$^{95}/_{96}$ Г.

Уральское войсковое реальное училище.

VI классъ. *Алгебра.* Нѣкто вносилъ ежегодно въ банкъ по 278,73 рубля, на 5%. По прошествіи 8 лѣтъ накопившіяся деньги онъ взялъ изъ банка и, раздѣливъ ихъ на двѣ части, первую отдалъ въ ростъ по столько процентовъ, сколько единицъ въ корнѣ уравненія

$$\frac{\sqrt{x+18}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+18}+\sqrt{x-3}}=(2,333\ldots)^{-1},$$

а вторую по столько процентовъ, сколько единицъ содержится въ суммѣ членовъ безконечно-убывающей геометрической прогрессіи, которой первый членъ $=2$, а 3-ій $={}^{98}/_{121}$. Съ обѣихъ частей онъ получилъ по прошествіи года 170 рублей дохода. Опредѣлить величину каждой части.

Геометрія. Въ мѣдномъ шарѣ, радіуса R, сдѣлано сквозное отверстіе, цилиндрическое. Ось этого цилиндра проходитъ черезъ центръ шара. Это отверстіе залито свинцомъ. Опредѣлить, какой въ данномъ

случаѣ удѣльный вѣсъ полученнаго такимъ образомъ тѣла, зная, что уд. в. мѣди = 8,9, а уд. в. свинца = 11,4. Радіусъ R шара = 5 сантиметрамъ.

Тригонометрія. Въ треугольникѣ измѣрены стороны $a = 350$ дюймамъ, $b = 280$ д. и высота $h_c = 210$ д., расположенная между ними. Найти третью сторону, углы и площадь?

Сообщ. *П. Свѣшниковъ* (Уральскъ).

Вольское реальное училище.

(Казанскій учебный округъ).

VII классъ. *Приложеніе алгебры къ геометріи* (3 часа). Начертить кругъ, проходящій черезъ данную точку и касательный къ данному кругу и данной прямой.

Дополнительный курсъ алгебры (2 часа). При какихъ значеніяхъ коэффиціентовъ p и q данное выраженіе:

$$4x^4 + 12x^3 + 5x^2 + px + q$$

обращается въ полный квадратъ трехчлена?

Геометрія (3 часа). Около круга даннаго радіуса, равнаго 1,0(5) дюйм., описана равнобочная трапеція съ угломъ въ 60^0 при основаніи. Опредѣлить площадь трапеціи.

P. S. Задачи на этотъ отдѣлъ (смѣшанный: геометрія съ тригонометріей) вошли въ программу письменныхъ экзаменовъ по математикѣ только съ нынѣшняго 1895—96 уч. года.

VI классъ. *Геометрія* (3 часа). (Одна задача на вычисленіе). Данъ шаръ радіуса R и на его большомъ кругѣ построенъ конусъ, котораго объемъ равенъ половинѣ объема даннаго шара. Опредѣлить радіусъ круга, образованнаго пересѣченіемъ шаровой поверхности съ коническою и отношеніе объема усѣченнаго конуса, образованнаго пересѣченіемъ даннаго конуса плоскостью вышеупомянутаго круга, къ объему верхняго, отсѣченнаго этой плоскостью, сегмента.

Тригонометрія (3 часа). Стороны треугольника пропорціональны числамъ: 6, 4,8(3) и 4,1(6). Найти разность между наибольшимъ и наименьшимъ углами треугольника.

Сообщ. *Б. Шапошниковъ* (Вольскъ).

ЗАДАЧИ.

№ 343. Показать, что если вписанный въ треугольникъ ABC кругъ радіуса r касается сторонъ $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ соотвѣтственно въ точкахъ A', B' и C', то

$$a \cdot \overline{AA'}^2 + b \cdot \overline{BB'}^2 + c \cdot \overline{CC'}^2 = 2S(5r + 2R)$$

и

$$\frac{\overline{AA'}^2}{bc} + \frac{\overline{BB'}^2}{ac} + \frac{\overline{CC'}^2}{ab} = 1 + \frac{5r}{2R},$$

гдѣ R есть радіусъ описаннаго около треугольника ABC круга, а S—
—площадь треугольника ABC.

Я. Полушкинъ (с. Знаменка).

№ 344. Въ данный шаръ радіуса r помѣстить 7 кубовъ такъ, чтобы одинъ изъ нихъ имѣлъ центръ общій съ центромъ даннаго шара, а каждый изъ остальныхъ имѣлъ одну сторону общую съ первымъ кубомъ и 4 вершины на поверхности даннаго шара.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 345. Рѣшить и изслѣдовать уравненія:

$$\sin y \cdot \cos z = \sin a,$$

$$\sin z \cdot \cos x = \sin b,$$

$$\sin x \cdot \cos y = \sin c.$$

(Заимств.) *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№. 346. Найти двузначное число, кратное семи, если кубъ его при дѣленіи на 4 и на 9 даетъ остатки, сумма которыхъ равна пяти.

С. Петрашкевичъ (Скопинъ).

№ 347. Изъ ортоцентра H треугольника ABC описана окружность, радіусъ которой есть средняя пропорціональная между радіусами вписанной и описанной окружностей того же треугольника. Доказать, что шесть точекъ пересѣченія построенной окружности съ высотами треугольника образуютъ шестиугольникъ, площадь котораго равна площади треугольника ABC.

М. Зиминъ (Елецъ).

№ 348. Найти такой треугольникъ, стороны котораго суть цѣлыя числа и удвоенная площадь котораго выражается числомъ, равнымъ его утроенному периметру.

(Заимств.) *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 278 (3 сер.). Крестьяне нѣкоторыхъ мѣстностей пользуются слѣдующимъ способомъ умноженія цѣлыхъ чиселъ: пишутъ рядомъ оба сомножителя и одинъ изъ нихъ дѣлятъ, а другой умножаютъ на два

и подписываютъ какъ частное, такъ и произведеніе подъ соотвѣтствующими множителями. Затѣмъ полученное частное снова дѣлятъ, а произведеніе умножаютъ на два, подписывая новое частное и произведеніе подъ прежними, и продолжаютъ это до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится единица. Всѣ числа въ столбцѣ произведеній, стоящія противъ нечетныхъ чиселъ въ столбцѣ частныхъ, отмѣчаются чертой и затѣмъ складываются. Сумма и будетъ искомымъ произведеніемъ.

Требуется объяснить этотъ способъ умноженія.

Обозначимъ одинъ изъ сомножителей черезъ m, другой — черезъ p. Пусть частное отъ дѣленія m на 2 будетъ q_1, а остатокъ r_1. Пусть далѣе частное отъ дѣленія q на 2 будетъ q_2, а остатокъ r_2, и т. д. Послѣднее частное равно единицѣ. Поступая, какъ указано въ задачѣ, получимъ такіе два ряда чиселъ:

$$\begin{array}{ll} m = 2q_1 + r_1 & p \\ q_1 = 2q_2 + r_2 & 2p \\ q_2 = 2q_3 + r_3 & 2^2 p \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ q_{n-1} = 2q_n + r_n & 2^{n-1} p \\ q_n = 1 & 2^n p. \end{array}$$

Вмѣсто того, чтобы складывать въ столбцѣ произведеній числа, стоящія противъ нечетныхъ чиселъ въ столбцѣ частныхъ, можно очевидно умножить всѣ числа въ столбцѣ произведеній на соотвѣтствующіе остатки въ столбцѣ частныхъ и сложить полученныя произведенія. Замѣчая же, что r_1, r_2, $r_3, \ldots r_{n-1}$, r_n суть цифры числа m, изображеннаго по двоичной системѣ, получимъ:

$$m = r_1 + 2r_2 + 2^2 r_3 + \ldots + 2^{n-1} r_n + 2^n ,$$

а потому

$$mp = pr_1 + 2pr_2 + 2^2 pr_3 + \ldots + 2^{n-1} pr_n + 2^n p.$$

М. Зиминъ (Орелъ); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; ученики Кишиневскаго реальнаго училища В. и Л.; С. Петрашкевичъ* (Скопинъ).

№ 279 (3 сер.). Найти трехзначное число по слѣдующимъ условіямъ: разность между искомымъ числомъ и его обращеннымъ есть двузначное число, а разность квадратовъ искомаго числа и его обращеннаго есть произведеніе нѣкотораго двузначнаго числа на 949.

Пусть $100x + 10y + z$ есть искомое трехзначное число. Разность между этимъ числомъ и его обращеннымъ равна $99(x-z)$, а такъ какъ она есть двузначное число, то очевидно

$$99(x - z) = 99, \quad x - z = 1.$$

Разность квадратовъ искомаго числа и его обращеннаго равна суммѣ ихъ, умноженной на разность, т. е. на 99. Слѣдовательно сумма искомаго числа и его обращеннаго равна 949, т. е.

$$101x + 20y + 101z = 949,$$

или

$$101x + 10y = 525,$$

откуда очевидно, что $x = 5$, а слѣдовательно $y = 2$, $z = 4$ и искомое число есть 524.

М. Зиминъ (Орелъ); *С. Петрашкевичъ* (Скопинъ); *Э. Заторскій* (Вильно); *И. Л—кій* (Оренбургъ); *L.* (Тамбовъ); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*

№ 280 (3 сер.). Двѣ окружности пересѣкаются въ точкахъ A и B. Къ нимъ проведена общая касательная. Черезъ точки прикосновенія C и D проведена окружность, которая также проходитъ черезъ точку B. Показать, что діаметръ этой окружности есть средняя пропорціональная между діаметрами данныхъ окружностей.

Пусть O_1 есть центръ окружности ABC, O_2 — центръ окружности ABD, и O — центръ окружности BCD. Легко показать, что

$$\angle BO_1O = \angle BCD = \angle BOO_2,$$

и

$$\angle BO_2O = \angle BDC = \angle BOO_1.$$

Поэтому треугольники BOO_1 и BOO_2 подобны, а слѣдовательно

$$BO_1 : BO = BO : BO_2, \text{ откуда } 2BO_1 : 2BO = 2BO : 2BO_2.$$

М. Зиминъ (Орелъ); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*; *В. Сахаровъ* (Тамбовъ); *воспитанники Глуховскаго учительскаго института Е. и Θ.*

№ 281 (3 сер.). Даны четыре точки A, B, C и D на одной прямой при извѣстныхъ разстояніяхъ $AB = m$ и $CD = n$; провести черезъ нихъ двѣ пары параллельныхъ линій такъ, чтобы въ пересѣченіи получился квадратъ. Указать, возможно ли при томъ же условіи построеніе ромба съ даннымъ угломъ.

Пусть требуется построить ромбъ (квадратъ) съ даннымъ угломъ α (прямымъ). На отрѣзкахъ AD и BC опишемъ окружности такъ, чтобы части ихъ, лежащія по одну сторону данной прямой, вмѣщали данный уголъ α. Проведя черезъ середины дугъ, лежащихъ по другую сторону прямой, т. е. вмѣщающихъ уголъ $180^0 - \alpha$, прямую, найдемъ въ пересѣченіяхъ ея съ проведенными окружностями двѣ вершины ромба. Задача имѣетъ, очевидно, два рѣшенія.

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; *М. Зиминъ* (Орелъ); *В. Сахаровъ*, *Николаевъ* (Тамбовъ); *ученики Кишиневскаго реальнаго училища В. и Л.*; *Э. Заторскій* (Вильно); *Свищовъ* (Спб.); *С. Циклинскій* (Пинскъ).

№ 282 (3 сер.). Сумма кубовъ, пятыхъ и седьмыхъ степеней n первыхъ чиселъ натуральнаго ряда равна 740301728400. Сколько чиселъ было взято?

Обозначимъ сумму кубовъ n первыхъ чиселъ натуральнаго ряда черезъ s_3, сумму пятыхъ степеней — черезъ s_5, и сумму седьмыхъ — черезъ s_7. Тогда

$$s_3 + s_5 + s_7 = 740301728400 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Но извѣстно, что

$$s_5 + s_7 = 2s_3^2 \dots\dots\dots \quad (2).$$

Изъ уравненія (1) и тожества (2) опредѣляемъ

$$s_3 = 608400.$$

Но

$$s_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

отсюда

$$\frac{n(n+1)}{2} = 780, \; n = 39.$$

Я. Полушкинъ (с. Знаменка); *М. Зиминъ* (Орелъ); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1895.—№ 11.

Propriétés des cercles de Chasles. Par M. *E. N. Barisien* (fin). Удерживая прежнія обозначенія (См. „Вѣстн." № 218, обз. Math.), отмѣтимъ еще слѣдующія свойства круговъ Chasles'я.

1) Если V и V′ суть окружности, описанныя около точекъ N и N′ и проходящія черезъ точку M, то двѣ общія касательныя къ эллипсу E и кругу V параллельны ON; точно также, двѣ общія касательныя къ E и V′ параллельны ON′.

2) Пусть Δ есть прямая, соединяющая проэкціи точки N на оси эллипса E; Δ'—подобная же прямая для точки N′. Прямыя Δ и Δ' проходятъ черезъ общую точку M окружностей V и V′ и эллипса E. Если p и q суть другія точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ E, то окружность Mpq касается E въ точкѣ M; центръ этой окружности совпадаетъ съ проэкціей O на нормаль MN.

3) Поляры точки O относительно круговъ V и V′, перпендикуляръ въ M къ прямой OM и параллель касательной въ M, проходящая черезъ точку симметричную съ O относительно этой касательной, пересѣкаются въ одной точкѣ.

4) Окружность V проходитъ черезъ проэкціи фокусовъ F, F′ на касательную въ M′ къ главному кругу.

5) Существуетъ безчисленное множество тр-въ T, одновременно описанныхъ около круга Chasles'я Σ и вписанныхъ въ эллипсъ E. Высоты каждаго изъ этихъ тр-въ суть нормали къ E.

Сумма квадратовъ сторонъ тр-ка T равна $4(2a^2 + 2b^2 + 5ab)$.

Если α, β, γ суть углы тр-ка T, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2 + b^2 + ab}{(a+b)^2},$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{2a^2 + 2b^2 + 5ab}{(a+b)^2},$$

$$\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma = \frac{ab}{2(a+b)^2}.$$

Сумма квадратовъ разстояній точки O отъ сторонъ тр-ка T равна $a^2 + ab + b^2$ (*Lemoine*).

Conditions pour qu'un système de troix axes soit trirectangle. Par *M. F. Dauge*. Для перехода отъ одной системы прямолинейныхъ координатъ къ другой служатъ формулы вида:

$$X = lx + l'y + l''z,\ Y = mx + m'y + m''z,\ Z = ny + n'y + n''z, \qquad (1)$$

въ которыхъ коэффиціенты $l, m, n, l', \ldots, n''$ связаны между собой условіями:

$$l^2 + m^2 + n^2 + 2Amn + 2Bnl + 2Clm = 1,$$

. . . .

. . . .

$$l'l'' + m'm'' + n'n'' + A(m'n'' + n'm'') + B(n'l'' + l'n'') + C(l'm'' + m'l'') = a, \qquad (2)$$

. . . .

. . . . , ... , ...

$$A = \cos YOZ,\ B = \cos ZOX,\ C = \cos XOY,$$

$$a = \cos yOz, \quad b = \cos zOx, \quad c = \cos xOy.$$

При прямоугольныхъ осяхъ $A = B = C = a = b = c = 0$ и условія (2) принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{array}{l} l^2 + m^2 + n^2 = 1,\ l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1,\ l''^2 + m''^2 + n''^2 = 1, \\ l'l'' + m'm'' + n'n'' = 0,\ l''l + m''m + n''n = 0,\ ll' + mm' + nn' = 0. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Эти условія, будучи необходимы для прямоугольности обѣихъ системъ координатъ, еще не достаточны для этого, ибо при условіяхъ (3) изъ равенствъ (2) получаются для A, B, C ур-нія

$$Amn + Bnl + Clm = 0,\ Am'n' + Bn'l' + Cl'm' = 0,\ Am''n'' + Bn''l'' + Cl''m'' = 0,$$

удовлетворяющіяся безчисленнымъ числомъ различныхъ значеній A, B, C. Только въ томъ случаѣ, когда $l, m, n, l', \ldots, n''$ суть cos-ы угловъ, составляемыхъ осями Ox, Oy, Oz съ осями OX, OY, OZ, условія (3) необходимы и достаточны для прямоугольности обѣихъ координатныхъ системъ.

Въ общемъ же случаѣ, какъ доказываетъ M. Dauge, *условія* (3) *необходимы и достаточны для того, чтобы оси обѣихъ координатныхъ системъ совпадали съ двумя системами равныхъ и сопряженныхъ діаметровъ одного и того же эллипсоида.* Когда этотъ эллипсоидъ обращается въ шаръ, обѣ системы координатъ прямоугольны.

Revue bibliographique.

Questions. №№ 937, 950.

Questions d'examen. №№ 703—709.

Questions proposées. №№ 1043—1046.

1895.—№ 12.

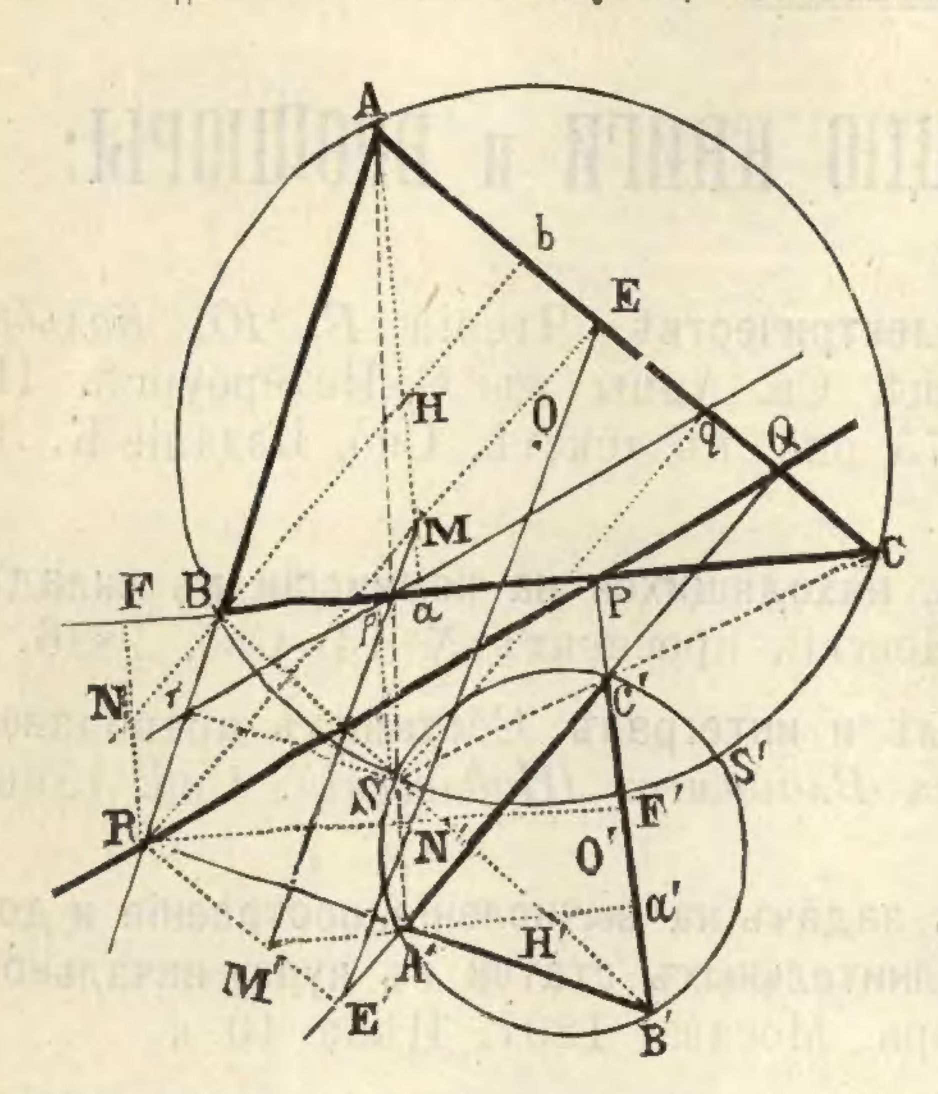
Démonstrations géométriques d'un théorème de M. Sondat.

Теорема Sondat. *Если стороны двухъ гомологичныхъ (перспективныхъ) тр-въ ABC и A'B'C' попарно перпендикулярны, то ось гомологіи (перспективы) ихъ дѣлитъ пополамъ разстояніе между ортоцентрами ихъ.*

I. Доказ. *Haerens'a*. Пусть P, Q, R суть пересѣченія сторонъ тр-въ съ осью гомологіи; H и H' — ортоцентры тр-въ; M и N — пересѣченія высотъ Aa и Bb тр-ка ABC съ перпендикулярами RE и RF изъ R на AC и BC; M' и N' — подобныя-же точки тр-ка A'B'C' (Фиг. 51). Такъ какъ тр-ки RAM и AME соотвѣтственно подобны тр-мъ R'A'M' и A'M'E', то

$$\frac{RM}{RM'} = \frac{AM}{A'M'} = \frac{ME}{M'E'},$$

т. е. EE'||MM'; отсюда слѣдуетъ, что RQ дѣлитъ пополамъ MM', или. что M и M' равно отстоятъ отъ RQ. Точно такъ же изъ подобія тр-въ RNB и RN'B', RBF и RB'F' найдемъ, что N и N' равно отстоятъ отъ прямой RQ. Но разстояніе δ точки H отъ QR равно суммѣ разстояній точекъ M и N отъ той-же прямой и разстояніе δ' точки H' отъ QR равно суммѣ разстояній M' и N' отъ той-же прямой, слѣд. $\delta=\delta'$, что и тр. док.



Фиг. 51.

II. Доказ. *M. Meurice'а* основано на томъ, что *центръ гомологіи тр-въ ABC и A'B'C' находится въ пересѣченіи окружностей ABC и A'B'C'*.

Дѣйствительно, обозначимъ чрезъ S центръ гомологіи тр-въ ABC и A'BB'. Если сѣкущая PQR тр-ка ABC будетъ перемѣщаться параллельно самой себѣ, то вершины тр-ка A',B',C' будутъ перемѣщаться по прямымъ AS, BS, CS. Такъ какъ стороны тр-ка A'B'C' остаются при этомъ параллельными перпендикулярамъ *Sp*, *Sq*,*Sr* изъ S на стороны тр-ка ABC, то точка S есть предѣльное положеніе тр-ка A'B'C'; поэтому точки *p*, *q*, *r* должны лежать на одной прямой; отсюда слѣдуетъ, что точка S находится на окружности ABC. Такъ какъ тр-ки ABC и A'B'C' имѣютъ аналогичное значеніе относительно другъ друга, то точка S находится и на окружности A'B'C'.

Далѣе доказ. Meurice'а основано на теоремѣ, что *прямая Симсона для данной точки окружности, описанной около тр-ка, проходитъ чрезъ средину прямой, соединяющей эту точку съ ортоцентромъ тр-ка.*

Triangles orthohomologiques. Par. *M. J. Neuberg.* Гомологическіе тр-ки съ перпендикулярными сторонами M. Neuberg предлагаетъ называть ортогомологическими тр-ми. Кромѣ теоремы Sondat (см. выше), авторъ обращаетъ вниманіе на слѣдующія свойства этихъ тр-въ.

1) *Центръ гомологіи ортогомологич. тр-въ находится въ пересѣченіи описанныхъ около нихъ окружностей* (см. выше, доказ. Meurice'а).

2) *Вторая точка пересѣченія S' окружностей, описанныхъ около ортогомологич. тр-въ, есть центръ подобія этихъ тр-въ.* Ибо тр-ки AS'A', BS'B', CS'C' подобны (фиг. 51).

3) *Окружности, описанныя около ортогомолог. тр-въ ортогональны.* Пусть O и O' суть центры окружностей; такъ какъ $OA \perp O'A'$, то $\angle OAS + \angle O'A'S = 90^0$; поэтому $\angle OSA = \angle O'SA' = 90^0$, т е. $\angle OSO' = 90^0$.

Bibliographie. Cours de Méthodologie mathématique. Par *F. Dauge.* Paris. 1896. Prix: 12 fr.

Notes mathématiques, 16. Рѣшеніе одной задачи о параболѣ. (*Déprez*).

17. Старѣйшему современному германскому математику, Карлу Вейерштрассу, 31-го октября 1895 г. исполнилось 80 лѣтъ.

Solutions de questions proposées. №№ 938, 951, 982.

Questions d'examen. №№ 702—713.

Questions proposées. №№ 1047—1050.

Д. Е.

ОСТАЛИСЬ НЕРѢШЕННЫМИ изъ числа предложенныхъ въ XIX семестрѣ задачи 253, 261, 270, 290, 293, 294.

ПРИСЛАНЫ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ и БРОШЮРЫ:

38. **Введеніе въ ученіе объ электричествѣ.** Чтенія *Б. Ю. Кольбе*, преподавателя физики въ училищѣ Св. Анны въ С.-Петербургѣ. II. Динамическое электричество. Съ 75 рис. въ текстѣ. Спб. Изданіе К. Л. Риккера. 1896. Ц. 1 р. 40 к.

39. **Каталогъ изданій и книгъ, находящихся на коммиссіи въ складѣ К. Л. Риккера** въ С.-Петербургѣ, Невскій проспектъ № 14. Спб. 1896.

40. **Къ ученію о дифференціалѣ и интегралѣ.** Составилъ преподаватель Полоцкаго кадетскаго корпуса *Владиміръ Шидловскій*. Спб. 1896. Ц. 40 к.

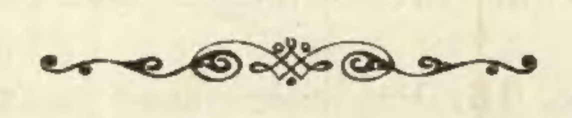
41. **Сборникъ геометрическихъ задачъ на вычисленіе, построеніе и доказательство съ приложеніемъ дополнительныхъ статей къ курсу начальной геометріи.** *В. Гебель*. Изданіе автора. Москва, 1897. Цѣна 40 к.

42. **Образованіе и истеченіе капель въ магнитномъ и электрическомъ полѣ.** *Н. А. Умовъ*. (Отд. оттискъ изъ VIII тома Трудовъ Отдѣленія Физическихъ Наукъ Императорскаго Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи). Москва. 1896.

ОТВѢТЫ РЕДАКЦІИ.

Н. В. С—скому (Оренбургъ),—Первая задача общеизвѣстна: рѣшеніе ея найдете въ учебникахъ алгебры, въ главѣ о двучленныхъ уравненіяхъ. Второй задачи мы рѣшительно не понимаемъ. Что значитъ выраженіе: „физическая сила дѣйствуетъ на геометрическій кругъ"?

А. Е—ву (Пятигорскъ).—Задача слишкомъ элементарна.



Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 8-го Августа 1896 г.

„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.